

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра математики, информаци-  
онных систем и программного  
обеспечения

**Методические указания  
к самостоятельной работе**

<b>Дисциплина:</b>	<u>Б1.О.05.01 Линейная алгебра и аналитическая геометрия</u> <small>(код и наименование дисциплины)</small>
<b>Направление подготовки</b>	<u>09.03.02 Информационные системы и технологии</u> <small>код и наименование направления подготовки /специальности</small>
<b>Направленность (профиль)</b>	<u>Геоинформационные системы</u> <small>(наименование направленности (профиля) образовательной программы)</small>
<b>Квалификация выпускника</b>	<u>бакалавр</u>

Мурманск  
2020

Составитель – Авдеева Елена Николаевна, доцент кафедры МИС и ПО

Методические указания к самостоятельной работе рассмотрены и одобрены на заседании кафедры-разработчика: МИС и ПО

24.11.2020 г., протокол № 4

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ОБЩИЕ МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ.....	4
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН .....	5
СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ.....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ.....	6
Вопросы для самоконтроля.....	<b>Ошибка! Закладка не определена.</b>



## ТЕМАТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Наименование тем и содержание самостоятельной работы	Количество часов по формам обучения (очная/заочная)
<p><b>1. Матрицы и определители.</b>  Матрица, ее элементы и размер. Виды матриц: строка, столбец, квадратная, единичная, нулевая, треугольная, диагональная, симметрическая. Основные операции над матрицами и их свойства. Перестановочные матрицы. След матрицы. Эквивалентность и ранг матрицы.  Определитель. Правила вычисления определителей различных порядков. Линейная зависимость строк матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Свойства определителя. Обратная матрица. Матричные уравнения.</p>	10/ 18
<p><b>2. Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Методы решения СЛАУ.</b>  Основные понятия. Ранг системы. Решение СЛАУ. Матричная запись СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли.  Критерий единственности решения. Формулы Крамера. Элементарные преобразования СЛАУ. Метод Гаусса. Метод обратной матрицы.  Базисные решения совместных неопределенных систем. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.</p>	10/ 18
<p><b>3. Элементы векторной алгебры.</b>  Векторы. Основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы. Действия над векторами, заданными проекциями.  Скалярное, векторное и смешанное произведение векторов</p>	10/ 18
<p><b>4. Элементы матричной алгебры.</b>  Векторное пространство. Понятие линейного пространства. Законы и аксиомы композиции в линейной алгебре. Векторное пространство. Основные понятия. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство. Линейные отображения. Общие сведения о линейных отображениях. Линейные операторы. Действия над линейными операторами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Ортогональный оператор, симметричный оператор, обратный оператор.  Квадратичные формы. Понятие квадратичной формы. Поведение квадратичной формы при воздействии оператора и связь между ними. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Свойства канонических форм. Критерий Сильвестра.</p>	10/ 18
<p><b>5. Элементы аналитической геометрии.</b>  Уравнение линии первого порядка на плоскости. Уравнение прямой: общее, параметрическое, через две точки, с угловым коэффициентом, в отрезках. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между прямыми. Пересечение прямых. Расстояние между двумя точками. Расстояние от точки до прямой.  Уравнение линии второго порядка на плоскости. Определение эллипса, гиперболы, параболы. Каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет.  Приведение уравнений к каноническому виду.  Уравнение плоскости.  Общее уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости. Переход от параметрического уравнения к общему. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.  Поверхности второго порядка.  Каноническое уравнение поверхности. Изображение. Сечения плоскостью.</p>	14 / 20
<b>Итого:</b>	<b>54/90</b>

## СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

### Основная литература:

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. [В 2 ч.]. Ч. 1 - 12-е изд. - Москва : Айрис-пресс, 2013.
2. Шипачев В. С. Высшая математика : учеб. пособие для бакалавров : [базовый курс] / В. С. Шипачев ; под ред. А. Н. Тихонова. - 8-е изд., перераб. и доп. - Москва : Юрайт, 2012.
3. Решение задач из курса аналитической геометрии и линейной алгебры [Электронный ресурс] / Беклемишев Д.В. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2014. – <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114806.html>

### Дополнительная литература:

4. Аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : Учеб. Для вузов / Ильин В.А., Позняк Э.Г. - 7-е изд., стер. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - (Курс высшей математики и математической физики). – <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922105118.html>
5. Аналитическая геометрия и линейная алгебра. [Электронный ресурс] / Кадомцев С. Б. - 2-е изд., испр. и доп. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. – <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922112901.html>
6. Данко П.Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч1 ;:Учеб пособие для вузов /П. Е. Данко, А.Г. Попов, Т.Я. Кожевникова, С.П. Данко. – 6-е изд. – М.:ООО «Издательство Ониск»: ООО «Издательство «Мир и Образование», 2006.
7. Малугин В. А Линейная алгебра. :учеб пособие / В.А. Малугин. – М.: Рид Групп, 2011. – 464с. – (Национальное экономическое образование)

### Перечень ресурсов информационно-телекоммуникационной сети «Интернет»

1. Электронно-библиотечные системы:
  - <http://www.studentlibrary.ru/>
  - <http://www.iprbookshop.ru/>

## МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ИЗУЧЕНИЮ ТЕМ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью самостоятельной работы студентов является:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- формирование умений использовать справочную и специальную литературу;
- развитие познавательных способностей и активности студентов: творческой инициативы, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации;
- развитие исследовательских умений.

Самостоятельная работа является одним из видов учебных занятий студентов, проводится внеаудиторно, выполняется студентом по заданию преподавателя, но без его непосредственного участия.

Объем времени, отведенный на самостоятельную работу, определяется в соответствии с учебным планом специальности и рабочей программой учебной дисциплины.

## Матрицы и определители.

Матрица, ее элементы и размер. Виды матриц: строка, столбец, квадратная, единичная, нулевая, треугольная, диагональная, симметрическая. Основные операции над матрицами и их свойства. Перестановочные матрицы. След матрицы. Эквивалентность и ранг матрицы.

*Цель:* закрепить навыки выполнения операций над матрицами

*Методические рекомендации по изучению темы:* используйте образцы решения примеров, приведенных в учебной литературе.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [6]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Приведите определение матрицы. Перечислите виды матриц.
2. Как определяется местоположение элемента в матрице?
3. Сформулируйте арифметические операции над матрицами.
4. В чем заключается операция транспонирования матрицы?
5. Сформулируйте правило перемножения матриц.
6. Каким требованиям должны удовлетворять перемножаемые матрицы?

## Определители и их свойства

Определитель. Правила вычисления определителей различных порядков. Линейная зависимость строк матрицы. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема Лапласа. Свойства определителя. Обратная матрица. Матричные уравнения.

*Цель:* закрепить навыки вычисления определителей 2-го и 3-го порядка.

*Методические рекомендации по изучению темы:* при вычислении определителей используйте их свойства.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [2], [6]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Сформулируйте универсальное правило вычисления определителей.
2. Перечислите свойства определителей.
3. Назовите алгоритм вычисления обратной матрицы.
4. Что называется минором матрицы?
5. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

## Системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

Основные понятия. Решение СЛАУ. Совместные и несовместные решения. Частное и общее решения. Однородная и неоднородная системы и ее совместность. Матричная запись СЛАУ. Теорема Кронекера-Капелли.

*Цель:* закрепить навыки решения матричных уравнений.

*Методические рекомендации по изучению темы:* при решении матричных уравнений следует помнить о некоммутативности операции умножения матриц.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [2], [6]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Может ли система линейных алгебраических уравнений иметь ровно два решения? Почему?
2. Сколько решений может иметь система линейных алгебраических уравнений, главный определитель которой не равен нулю?

3. Чему равен ранг квадратной матрицы пятого порядка, если ее определитель равен трем?
4. Даны две матрицы третьего порядка с определителями:  $|A| = 6$ ,  $|B| = 7$ . Ранг какой матрицы больше?

### Методы решения СЛАУ

Критерий единственности решения. Формулы Крамера. Элементарные преобразования СЛАУ. Метод Гаусса. Метод обратной матрицы.

Базисные решения совместных неопределенных систем. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений.

*Цель:* закрепить навыки решения СЛАУ.

*Методические рекомендации по изучению темы:* вычисление ранга системы значительно облегчит ответ на вопрос о наличии и количестве решений СЛАУ

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. В каких случаях для решения могут использоваться формулы Крамера?
2. Как определить, имеет ли система линейных алгебраических уравнений решения?
3. В чем заключается прямой и обратный ход метода Гаусса?
4. Сформулируйте алгоритм решения СЛАУ с использованием обратной матрицы.

### Векторы

Основные понятия. Линейные операции над векторами. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей. Модуль вектора. Направляющие косинусы.

Действия над векторами, заданными проекциями.

*Цель:* закрепить навыки выполнения операций над векторами.

*Методические рекомендации по изучению темы:* приступая к изучению темы, следует вспомнить сведения о векторах, известные из школьного курса геометрии.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Сформулируйте определение геометрического вектора и приведите линейные операции над векторами.
2. Что называется проекцией вектора на направление?
3. Какая величина в разложении вектора  $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$  по базису в трехмерном пространстве является проекцией вектора на ось  $ox$ ?
4. Как рассчитать направляющие косинусы вектора  $\mathbf{a}$ ?

### Скалярное произведение векторов и его свойства

Определение скалярного произведения. Свойства скалярного произведения. Выражение скалярного произведения через координаты. Приложения скалярного произведения.

*Цель:* закрепить навыки выполнения операций над векторами.

*Методические рекомендации по изучению темы:* составьте краткий конспект, содержащий определение, свойства и основные формулы для скалярного произведения векторов.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Дайте определение скалярного произведения векторов.

2. Запишите формулу для вычисления скалярного произведения векторов, заданных координатами в декартовой системе.
3. Сформулируйте условие перпендикулярности векторов через скалярное произведение.
4. Перечислите свойства скалярного произведения.

### Векторное произведение векторов и его свойства

Определение векторного произведения. Свойства векторного произведения. Выражение векторного произведения через координаты. Приложения векторного произведения.

*Цель:* закрепить навыки выполнения операций над векторами

*Методические рекомендации по изучению темы:* составьте краткий конспект, содержащий определение, свойства и основные формулы для векторного произведения векторов.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Дайте определение векторного произведения векторов.
2. Запишите формулу для вычисления векторного произведения векторов, заданных координатами в декартовой системе.
3. Перечислите свойства векторного произведения.

### Смешанное произведение векторов и его свойства

Определение смешанного произведения. Свойства смешанного произведения. Выражение смешанного произведения через координаты. Приложения смешанного произведения.

*Цель:* закрепить навыки выполнения операций над векторами

*Методические рекомендации по изучению темы:* составьте краткий конспект, содержащий определение, свойства и основные формулы для смешанного произведения векторов.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Дайте определение смешанного произведения векторов.
2. Запишите формулу для вычисления смешанного произведения векторов, заданных координатами в декартовой системе.
3. Перечислите свойства смешанного произведения.

### Векторное пространство

Понятие линейного пространства. Законы и аксиомы композиции в линейной алгебре. Векторное пространство. Основные понятия. Размерность и базис векторного пространства. Переход к новому базису. Евклидово пространство.

*Цель:* закрепить понятие векторного пространства

*Методические рекомендации по изучению темы:* следует помнить, что линейное пространство образуют элементы любой природы, удовлетворяющие законам и аксиомам композиции в линейной алгебре.

*Рекомендуемая литература:*

[1], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Что называется  $n$ -мерным вектором?
2. Перечислите линейные операции над векторами и их свойства.
3. Какие вектора называются линейно зависимыми и линейно независимыми?
4. Какое линейное пространство называется  $n$ -мерным?
5. Что называется базисом  $n$ -мерного линейного пространства?
6. В базисе  $e_1, e_2, e_3$  заданы векторы  $a_1 = (1; 1; 0)$ ,  $a_2 = (1; -1; 1)$  и  $a_3 = (-3; 5; -6)$ . Показать, что векторы  $a_1, a_2, a_3$  образуют базис.

#### Линейные отображения.

Общие сведения о линейных отображениях. Линейные операторы. Действия над линейными операторами. Собственные векторы и собственные значения линейного оператора. Ортогональный оператор, симметричный оператор, обратный оператор.

*Цель:* закрепить навыки вычисления собственных значений и собственных векторов линейных операторов.

*Методические рекомендации по изучению темы:* при вычислении собственных векторов оператора можно использовать стандартный алгоритм.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Для линейного отображения сформулируйте понятия: образ, ранг, ядро, дефект.
2. Перечислите наиболее важные свойства линейного отображения.
3. Сформулируйте теорему о связи матриц оператора в разных базисах.
4. Приведите определение собственного вектора и собственного значения матрицы.
5. Что называется характеристическим уравнением и спектром оператора?

#### Квадратичные формы

Понятие квадратичной формы. Поведение квадратичной формы при воздействии оператора и связь между ними. Приведение квадратичной формы к каноническому виду. Свойства канонических форм. Критерий Сильвестра.

*Цель:* закрепить навыки приведения квадратичной формы к каноническому виду.

*Методические рекомендации по изучению темы:* следует помнить, что канонические формы, полученные разными способами, обладают некоторыми общими свойствами.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Сформулируйте понятие квадратичной формы.
2. Сформулируйте теорему о приведении формы к каноническому виду.
3. Приведите свойства канонических форм.
4. Сформулируйте критерий Сильвестра.

#### Уравнение линии первого порядка на плоскости

Уравнение прямой: общее, параметрическое, через две точки, с угловым коэффициентом, в отрезках. Условие параллельности и перпендикулярности прямых. Угол между прямыми. Пересечение прямых. Расстояние между двумя точками. Расстояние от точки до прямой.

*Цель:* закрепить навыки построения и преобразования прямых.

*Методические рекомендации по изучению темы:* обратите особое внимание на запись и построение прямой, заданной уравнением в отрезках.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Напишите общее уравнение прямой.
2. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
3. Напишите уравнение прямой, проходящей через две заданные точки.
4. Напишите уравнение прямой с угловым коэффициентом, проходящей через заданную точку.
5. Напишите уравнение прямой в отрезках.
6. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности прямых.

#### Уравнение линии второго порядка на плоскости

Определение эллипса. Каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет.

Определение гиперболы. Каноническое уравнение, фокусы, эксцентриситет.

Определение параболы. Каноническое уравнение, фокус, директриса.

Приведение уравнений к каноническому виду.

*Цель:* закрепить навыки построения кривых второго порядка.

*Методические рекомендации по изучению темы:* для построения кривых второго порядка следует их уравнения привести предварительно к каноническому виду.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Сформулируйте определения эллипса, гиперболы и параболы. Приведите их канонические уравнения.
2. Поясните значение параметров, содержащихся в канонических уравнениях эллипса, гиперболы, параболы и укажите их при построении.
3. Дайте определение понятиям: эксцентриситет, директриса, асимптота, фокус.

#### Уравнение плоскости

Общее уравнение плоскости. Параметрическое уравнение плоскости. Переход от параметрического уравнения к общему. Угол между двумя плоскостями. Условия параллельности и перпендикулярности двух плоскостей. Расстояние от точки до плоскости.

*Цель:* закрепить навыки составления уравнения плоскости

*Методические рекомендации по изучению темы:* составьте краткий конспект, содержащий основные формулы.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Напишите общее уравнение плоскости.
2. Какой вектор плоскости называется нормальным?
3. Как определить расстояние от точки до плоскости?
4. Напишите уравнение плоскости в отрезках.
5. Сформулируйте условие параллельности и перпендикулярности плоскостей.

#### Поверхности второго порядка

Каноническое уравнение поверхности. Изображение. Сечения плоскостью.

*Цель:* закрепить понятие канонического уравнения поверхности.

*Методические рекомендации по изучению темы:* рекомендуется каждое уравнение сопровождать рисунком.

*Рекомендуемая литература:*

[7], [3], [4]

*Вопросы и задачи для самопроверки:*

1. Приведите классификацию поверхностей второго порядка.
2. Как называются поверхности, составленные из прямых линий. Приведите примеры таких поверхностей.
3. Для чего используется метод сечений при изучении поверхностей второго порядка?